Họ Tên: Đặng Đào Đạt Thành

MSSV: 3124411274

Lớp: DCT124C6

Câu 1:

**(a)** Có 21 cạnh. Tổng bậc = 42. Mỗi đỉnh bậc 3 nên 3n = 42, suy ra n = 14.  
→ **Số đỉnh: 14**

**(b)** Có 15 cạnh. Tổng bậc = 30. Ba đỉnh bậc 4, còn lại bậc 3.  
12 + 3(n-3) = 30, suy ra n = 9.  
→ **Số đỉnh: 9**

**(c)** Có 14 cạnh. Tổng bậc = 28. Hai đỉnh bậc 5, còn lại bậc 3.  
10 + 3(n-2) = 28, suy ra n = 8.  
→ **Số đỉnh: 8**

**(d)** Có 22 cạnh. Tổng bậc = 44. Mỗi đỉnh bậc từ 3 trở lên nên 3n không vượt quá 44.  
Suy ra n tối đa là 14. Với n = 14 vẫn thỏa.  
→ **Số đỉnh nhiều nhất: 14**

Câu 2:

1. G liên thông, có 26 cạnh; biểu diễn phẳng chia mặt thành 14 miền.  
   Dùng công thức Euler cho đồ thị liên thông: v−e+f=2v - e + f = 2v−e+f=2.  
   Thay e=26,f=14e=26, f=14e=26,f=14: v−26+14=2v - 26 + 14 = 2v−26+14=2 ⇒ v−12=2v - 12 = 2v−12=2 ⇒ **v = 14**.  
   → **Số đỉnh: 14.**
2. Với đồ thị phẳng có k thành phần liên thông, n đỉnh, m cạnh và r miền, công thức tổng quát là:  
   n - m + r = 1 + k.  
   Suy ra r = m - n + k + 1.  
   → **r = m - n + k + 1**
3. G là đồ thị hai phía với V = V1 ∪ V2, |V1| = n1, |V2| = n2, |E| = m.  
   Mỗi cạnh nối một đỉnh ở V1 với một đỉnh ở V2. Tối đa có thể nối tất cả cặp (v1, v2), nên m không vượt quá n1 × n2.  
   (Cách khác: tổng các bậc của đỉnh trong V1 bằng m, mỗi đỉnh trong V1 có bậc tối đa n2, nên m ≤ n1·n2.)  
   → **m ≤ n1 · n2**

Câu 3:

1. Với đồ thị đơn vô hướng có n đỉnh (n từ 2 trở lên). Bậc của mỗi đỉnh có thể nằm trong khoảng từ 0 đến n-1. Tuy nhiên không thể đồng thời có một đỉnh bậc 0 và một đỉnh bậc n-1, vì đỉnh bậc n-1 phải nối với tất cả các đỉnh khác. Như vậy chỉ có nhiều nhất n-1 giá trị bậc cho n đỉnh. Theo nguyên lý bồ câu, chắc chắn tồn tại ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.  
   → **Kết luận: có ít nhất hai đỉnh cùng bậc**
2. Đồ thị G và G’ đều có 6 đỉnh. Quan sát bậc của các đỉnh, tất cả đều có bậc 3. Đồng thời, G và G’ đều chia thành hai tập đỉnh, mỗi tập có 3 đỉnh, và mỗi đỉnh của tập này nối với tất cả đỉnh của tập kia. Đây chính là đồ thị hai phía đầy đủ K3,3. Do đó hai đồ thị đẳng cấu với nhau.  
   → **Kết luận: G và G’ đẳng cấu**
3. Giả sử đồ thị không liên thông, nghĩa là có thể tách thành ít nhất hai thành phần. Gọi một thành phần có a đỉnh và thành phần kia có b đỉnh, khi đó a + b = n. Chọn một đỉnh ở thành phần thứ nhất và một đỉnh ở thành phần thứ hai, khi đó bậc của hai đỉnh này không vượt quá (a - 1) và (b - 1). Tổng bậc của chúng không vượt quá n - 2, mâu thuẫn với giả thiết rằng tổng bậc của hai đỉnh bất kỳ không nhỏ hơn n. Vậy đồ thị phải liên thông.  
   → **Kết luận: đồ thị liên thông**
4. Đồ thị có 24 cạnh nên tổng bậc bằng 48. Có 5 đỉnh bậc 2, tổng bậc phần này là 10. Các đỉnh còn lại (n - 5 đỉnh) đều có bậc ít nhất là 3, nên tổng bậc của chúng không nhỏ hơn 3(n - 5). Khi đó:  
   10 + 3(n - 5) ≤ 48.  
   Giải ra được n ≤ 17. Với n = 17, tổng bậc tối thiểu bằng 46, còn thiếu 2 bậc có thể phân bổ cho một vài đỉnh, vẫn thỏa điều kiện.  
   → **Kết luận: số đỉnh tối đa là 17**

Câu 4:

1. Giả sử G là đồ thị đơn vô hướng mà số cạnh bằng số đỉnh.  
   Nếu G không có chu trình thì G là rừng; một rừng có n đỉnh chỉ có nhiều nhất n-1 cạnh. Vì ở đây số cạnh bằng số đỉnh, nên G không thể là rừng, tức là G phải chứa ít nhất một chu trình.  
   → **Kết luận: G có ít nhất một chu trình.**
2. G có n đỉnh, n từ 3 trở lên. Giả sử mọi đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn (n - 1)/2 và giả sử ngược là G không liên thông.  
   Chia G thành hai thành phần. Gọi a là số đỉnh thành phần nhỏ hơn hoặc bằng số còn lại. Với một đỉnh trong thành phần nhỏ, bậc của nó không vượt quá a - 1. Nhưng vì a không lớn hơn n/2, ta có a - 1 nhỏ hơn (n - 1)/2 (khi n ≥ 3). Điều này mâu thuẫn với giả thiết mọi đỉnh có bậc không nhỏ hơn (n - 1)/2. Vậy giả sử ngược sai, nghĩa là G phải liên thông.  
   → **Kết luận: G liên thông.**
3. G là đồ thị vô hướng có đúng hai đỉnh bậc lẻ, gọi là u và v.  
   Trong mỗi thành phần liên thông của đồ thị, tổng các bậc trong thành phần là một số chẵn, nên trong mỗi thành phần số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn. Vì toàn đồ thị chỉ có đúng hai đỉnh bậc lẻ, hai đỉnh đó phải nằm cùng trong một thành phần. Do đó có một đường đi nối u và v.  
   → **Kết luận: tồn tại đường đi từ u đến v.**

**(d)** Chứng minh: nếu một đồ thị đơn vô hướng có n đỉnh và số cạnh lớn hơn (n - 1)(n - 2) chia cho 2 thì đồ thị liên thông.  
Lý do: nếu đồ thị không liên thông thì có một thành phần tách biệt với ít nhất một đỉnh. Để số cạnh trong đồ thị bị tách tối đa mà vẫn không liên thông, ta lấy một thành phần là một đỉnh đơn (tức đỉnh cô lập) và phần còn lại là đồ thị đầy đủ trên n - 1 đỉnh. Khi đó số cạnh lớn nhất của đồ thị không liên thông bằng số cạnh của đồ thị đầy đủ trên n - 1 đỉnh, tức là (n - 1)(n - 2) chia cho 2. Vậy nếu số cạnh thực tế lớn hơn giá trị đó thì không thể tách được một đỉnh ra, tức là đồ thị phải liên thông.  
→ **Kết luận: nếu số cạnh nhiều hơn (n - 1)(n - 2)/2 thì đồ thị liên thông.**